Lec 40 函数项级数及其一致收敛性

40.1 函数项级数收敛域与和函数

定义 40.1

1. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 有收敛点 x_0
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛点的全体称之为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域, 记作 I.
3. 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x), x \in I$, 称 S(x) 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的和函数.

♣

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域 I 的求法

1. 可利用 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = g(x) < 1$, 求出使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛的收敛域;
2. 可利用 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{|a_n(x)|} = g(x) < 1$, 求出使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛的收敛域;

例 40.1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域为 $I = (-\infty, +\infty)$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上的逐点收敛与一致收敛

定义 40.2

1. 对 $\forall x_0 \in I, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 都收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上逐点收敛.

   此时, 令 $S_n(x_0) = a_1(x_0) + a_2(x_0) + \cdots + a_n(x_0), S(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$. 即对 $\forall \varepsilon, \forall x_0 \in I, \exists n_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > n_0(\varepsilon, x_0), |S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立,
2. 若对 $\forall \varepsilon, \forall x_0 \in I, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*, N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关, 与 x_0 无关, 且对 $\forall n > N(\varepsilon), |S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立, 则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛 (uniform convergence).

♣

显然, 一致收敛是在逐点收敛的基础上增加了新条件的更强收敛性. 因此, 一致收敛列必定是逐点收敛的, 反之未必.

40.2 函数项级数一致收敛的四种判别法

定理 40.1 (Cauthy 准则)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*$. $|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \varepsilon$ 恒成立.

推论 40.1

对于上述过程, 特别地, 当 $p = 1$ 时,$|a_{n+1}(x)| < \varepsilon$ 恒成立, 即 $a_n(x)$ 在 I 上一致趋于零是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件.

此时, 即当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 由 $|a_{n+1}(x)| < \varepsilon$ 恒成立 $\Rightarrow \sup_{x \in I} |a_n(x)| \to 0 (n \to 0)$.

即 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |a_n(x)| = 0$ 成为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件.

定理 40.2 (Weierstrass)

若 $|a_n(x)| \leqslant b_n, \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

称数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的优级数或控制 (强) 级数.

注 优级数不唯一.

证明 已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 设 $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \mathbb{R} \\ B_n = b_1 + b_2 + \cdot + \boldsymbol{b}_n \end{cases}$ 则 $\lim_{n\to\infty} B_n = B \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*$, 有 $|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$ 恒成立, 此时, 对 $\forall x \in I, |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)| + |a_{n+2}(x)| + \cdots + |a_{n+p}(x)| \leqslant b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$ 恒成立. 依一致收敛的 Cauthy 准则,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

定义 40.3

1. $\exists M > 0$, 且 M 与 x 无关, 使得 $|A_n(x)| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I$, 则称 $A_n(x)$ 在 I 上一致有界
2. $\forall \varepsilon i > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > \mathbb{N}(\varepsilon), 0 \leqslant b_n < \varepsilon$, 其中 $N(\varepsilon)$ 与 I 中的 x 无关, 则称 $b_n(x)$ 在 I 上一致趋于零.

定理 40.3 (Dirichlet)

在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 中, 若

1. $A_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_N(x)$ 在 I 上一致有界.
2. $b_n(x)$ 在 I 上一致趋于零.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

♡

定理 40.4 (Abel)

在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 中, 若

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上一致收敛.
2. $b_n(x)$ 关于 n 单调且在 I 上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

♡

40.3 例题

例 40.2 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中逐点收敛, 且 $a_n(x)$ 在 a 点右连续. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛.

注 $a_n(x)$ 在 b 点左连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ 发散, 则同样有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛的结论.

证明 用反证法: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛, 由 Cauthy 准则,$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*, |a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 对$\forall x \in (a,b)$ 恒成立.$a_n(x)$ 在 a 点右连续, 对上述不等式两端取 $x \to a^+$ 极限, 由极限保序性 $|a_{n+1}(a) + a_{n+2}(a) + \cdots + a_{n+p}(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, 即有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$, 对$\forall n > N(\varepsilon), |a_{n+1}(a) + a_{n+2}(a) + \cdots + a_{n+p}(a)| \leqslant \varepsilon$, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ 收敛, 这与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ 发散矛盾. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致收敛.

例 40.3 证明:$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中逐点收敛, 绝对收敛, 内闭一致收敛, 但非一致收敛.

证明 $\forall x_0 \in (-1,1)$ 都有 $|x_0| < 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_0|^n = \frac{|x_0|}{1-|x_0|}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中逐点收敛, 绝对收敛;

对 $\forall[a,b]\subset(-1,1),\exists r_0\in(0,1)$, 使 $[a,b]\subset[-r_0,r_0]\subset(-1,1)$, 对 $x\in[a,b]$, 有 $|x^n|\leqslant r_0^n,\forall n\in\mathbb{N}^*$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_0^n$ 收敛, 依 Weierstrass 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 中内闭一致收敛;

再从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1^n$ 发散以及例 40.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 在 $(-1,1)$ 中非一致收敛.

例 40.4 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点收敛, 绝对收敛, 内闭一致收敛, 但非一致收敛.

证明 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, 由 $\mathrm{e}^{nx_0}=1+nx_0+\dfrac{(nx_0)^2}{2!}+\dfrac{(nx_0)^3}{3!}+R_3(x_0)>\dfrac{(nx_0)^3}{3!}\Rightarrow \mathrm{e}^{-nx_0}<\dfrac{3!}{(nx_0)^3}\Rightarrow n\mathrm{e}^{-nx_0}<\dfrac{6}{n^2x_0^3}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{6}{n^2x_0^3}=\dfrac{6}{x_0^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 依比较判别法, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点收敛, 绝对收敛;

对 $\forall[a,b]\subset(0,+\infty)$, 有 $\left|n\mathrm{e}^{-nx}\right|\leqslant n\mathrm{e}^{-na},\forall xin[a,b],\forall n\in\mathbb{N}^*$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-na}$ 收敛, 依 Weierstrass 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致收敛;

而 $a_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散, 由例 40.2 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中非一致收敛.

例 40.5 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^\lambda},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^\lambda}$ 当 $\lambda>1$ 时在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对收敛, 一致收敛; 当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时, 在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 中条件收敛且内闭一致收敛 $(\forall k\in\mathbb{Z})$.

证明

1. 当 $\lambda>1$ 时, 从 $\left|\dfrac{\cos nx}{n^\lambda}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^\lambda},\left|\dfrac{\sin nx}{n^\lambda}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^\lambda}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\lambda}$ 逐点, 绝对, 一致收敛.
2. 当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时; 对 $\forall[a,b]\subset(k\pi,(k+1)\pi)$. 由 $\sin\dfrac{x}{2}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 知 $\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$ 在 $[a,b]$ 中有最小值, 设其为 $\alpha_0(\alpha_0>0)$, 则在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos nx)\dfrac{1}{n^\lambda}$ 中, $|A_n(x)|=|\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\dfrac{1}{\alpha_0}\triangleq M$, $b_n(x)=\dfrac{1}{n^\lambda}$ 关于 n 单调递减一致趋于 0, 依照一致收敛的 Dirichlet 判别法, 当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^\lambda},\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^\lambda}$ 在 $[a,b]$ 中条件收敛且一致收敛, 故内闭一致收敛.

例 40.6 证明: Riemann 的 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛, 绝对收敛, 内闭一致收敛, 但非一致收敛.

证明 $\forall x_0\in(1,+\infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{x_0}}$ 收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛, 绝对收敛.

$\forall[a,b]\subset(1,+\infty)$, 有 $\left|\dfrac{1}{n^x}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^a},\forall x\in[a,b],\forall n\in\mathbb{N}^*$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a}$ 收敛, 由一致收敛的 Weierstrass 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 故内闭一致收敛.

设 $a_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$, 则 $a_n(x)$ 在 $x=1$ 处右连续, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 故可得非一致收敛.

注 事实上, 对 $\forall\alpha>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中一致收敛; 对 $\forall\alpha>1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中一致收敛.

✍ 作业 ex7.2:2(1)(3)(7),4(1)(2)(3)(4)(5).